الجمهورية التونسية ★★★ وزارة التربية	**امتحان شهادة ختم التعليم الأساسي العام** **دورة 2022** الاختبار: **الرياضيات** — الحصّة : **ساعتان** — ضارب الاختبار: **2**

التّمرين الأوّل : (3 نقاط)

يلي كلّ سؤال من أسئلة هذا التّمرين ثلاثة مقترحات للإجابة، أحدها فقط صحيح.
أنقل، في كلّ مرّة، على ورقة تحريرك رقم السّؤال والإجابة الصّحيحة الموافقة له.

1) إذا كان مربّع طول قطره $2\sqrt{5}+\sqrt{2}$ فإنّ طول ضلعه يساوي :

أ) $\sqrt{5}+2$ ب) $\sqrt{10}+1$ ج) $\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) مجموعة حلول المتراجحة $1-3|x|\geq -14$ في IR هي :

أ) $]-\infty,-5]\cup[5,+\infty[$ ب) $[0,5]$ ج) $[-5,5]$

3) إذا كان $x=\sqrt{3}-2$ فإنّ العدد $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ يساوي :

أ) $-\frac{x}{2}$ ب) $-x$ ج) x

التّمرين الثاني : (3.5 نقاط)

نعتبر العددين الحقيقيين $a=\frac{16+\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}+2\right)^2}{2}$ و $b=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$.

1) أ) أثبت أنّ $a=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

ب) قارن 7 و $3\sqrt{5}$ ثم أثبت أنّ a عدد موجب.

2) أ) بيّن أنّ b و $1-a$ عددان مقلوبان.

ب) استنتج أنّ $a<1$.

ج) بيّن أنّ $1-a^2$ عدد موجب.

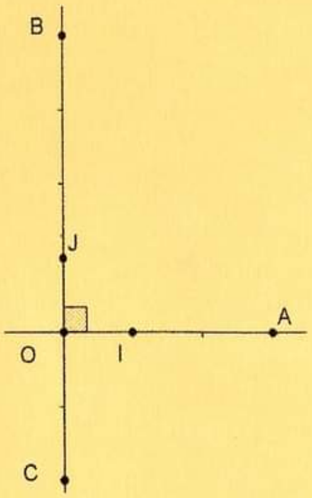
د) بيّن أنّ $a+\sqrt{2|a-1|-|a^2-1|}=1$.

التّمرين الثالث : (3.5 نقاط)

ليكن (O, I, J) معيّنا في المستوي حيث $(OI)\perp(OJ)$ و $OI=OJ=1$.

نعتبر النّقاط $A(3,0)$ و $B(0,4)$ و $C(0,-2)$.

المستقيم المارّ من I والعمودي على (OA) يقطع $[AJ]$ في نقطة G.



1) أ) بيّن أنّ $(OJ)//(IG)$.

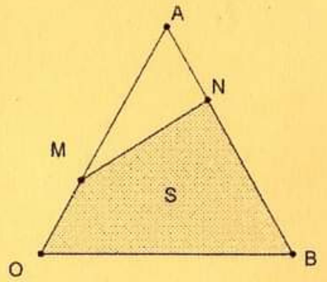
ب) بيّن أنّ $\frac{IG}{OJ}=\frac{AG}{AJ}=\frac{AI}{AO}$ واستنتج أنّ $AG=\frac{2}{3}AJ$.

2) بيّن أنّ J منتصف $[BC]$ وأنّ G مركز ثقل المثلث ABC.

3) المستقيم (BG) يقطع (AC) في نقطة K، أوجد إحداثيات النقطة K.

4) بيّن أنّ مساحة المثلّث ABK تساوي $\frac{9}{2}$.

التمرين الرابع : (5 نقاط)



1) لتكن العبارة $E=x^2-4x+16$ حيث x عدد حقيقي.

أ) بين أنّ $E-13=(x-1)(x-3)$.

ب) جِدْ مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $E=13$.

2) **(وحدة قيس الطّول هي الصّنتمتر).** في الرّسم المقابل لدينا :

- OAB مثلّث متقايس الأضلاع حيث $OA=4$،
- a عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0,2[$ و M نقطة من $[OA]$ و N نقطة من $[AB]$ حيث $OM=AN=a$.

لتكن S مساحة الرّباعي $OMNB$.

أ) لتكن H المسقط العمودي لـ N على $[OA]$ و K النّقطة من $[OA]$ حيث $AK=AN$.

بيّن أنّ المثلّث AKN متقايس الأضلاع واستنتج البعد NH بدلالة a.

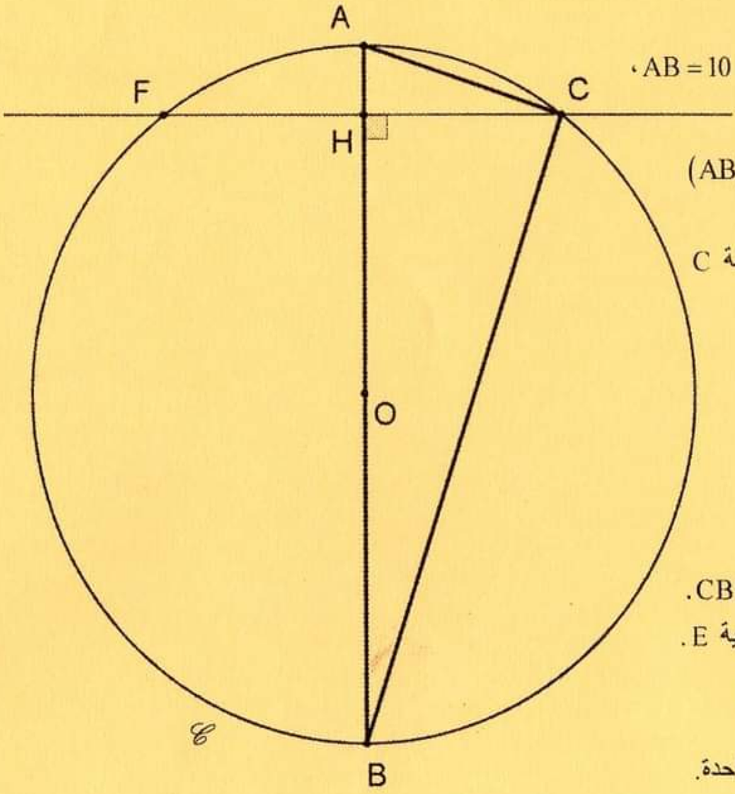
ب) بيّن أنّ مساحة المثلّث AMN تساوي $\frac{a(4-a)\sqrt{3}}{4}$.

ج) أحسب مساحة المثلّث OAB واستنتج أنّ $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2-4a+16)$.

د) بيّن أنّ $S=\frac{\sqrt{3}}{4}[(a-2)^2+12]$ واستنتج أنّ $S\geq 3\sqrt{3}$.

3) جِدْ العدد الحقيقي a حيث $S=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

التّمرين الخامس : (5 نقاط) (وحدة قيس الطّول هي الصّنتمتر).



في الرّسم المقابل لدينا :

- $\mathscr{C}$ دائرة قطرها $[AB]$ ومركزها O حيث $AB=10$،
- H نقطة من $[AB]$ حيث $AH=1$،
- المستقيم المارّ من النقطة H والعمودي على (AB) يقطع الدّائرة $\mathscr{C}$ في نقطتين F و C.

1) أ) بيّن أنّ المثلّث ABC قائم الزاوية في النّقطة C وأنّ $HC=3$.

ب) بيّن أنّ H منتصف $[FC]$.

2) المستقيم المارّ من O والعمودي على (BC) يقطع $[BC]$ في نقطة K.

لتكن S النّقطة من نصف المستقيم $[KO)$ حيث $OS=2OK$.

بيّن أنّ K منتصف $[BC]$ وأنّ O مركز ثقل المثلّث CBS.

3) المستقيم (CO) يقطع الدائرة $\mathscr{C}$ في نقطة ثانية E.

أ) بيّن أنّ الرّباعي $ACBE$ مستطيل ثمّ استنتج أنّ $OBES$ متوازي أضلاع.

ب) أثبت أنّ النّقاط E و S و F على استقامة واحدة.

ج) أثبت أنّ $FS=3$.

4) أحسب مساحة الرّباعي $OHFS$.

(1)

التمرين (1)

1) ب) $\sqrt{10}+1$

2) ج) $[-5,5]$

3) ب) $-x$

التمرين (2)

1) أ)

$$a=\frac{16+\sqrt{5}-(\sqrt{5}+2)^2}{2}$$

$$=\frac{16+\sqrt{5}-5-4-4\sqrt{5}}{2}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

ب) لدينا $\sqrt{49}>\sqrt{45}$ إذن $7>3\sqrt{5}$ وبالتالي

$7-3\sqrt{5}>0$ ومنه a عدد موجب

2) أ)

$$b(1-a)=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\times\left(1-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=\frac{(5+3\sqrt{5})}{10}\times\frac{(2-7+3\sqrt{5})}{2}=\frac{(5+3\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)}{2\times10}$$

$$=\frac{(3\sqrt{5})^2-5^2}{20}=\frac{20}{20}=\boxed{1}$$

ومنه b و $1-a$ مقلوبان

ب) لدينا $b(1-a)=1>0$

و b عدد موجب إذن $1-a>0$ ومنه $\boxed{1>a}$

ج) لنا: $0<a<1$ يعني $a^2<1^2$ ومنه $a^2-1<0$

يعني $\boxed{1-a^2>0}$

د) لدينا $a<1$ يعني $|a-1|=1-a$

و $1>a^2$ يعني $|a^2-1|=1-a^2$

وبالتالي

$$a+\sqrt{2|a-1|-|a^2-1|}=a+\sqrt{2(1-a)-(1-a^2)}$$

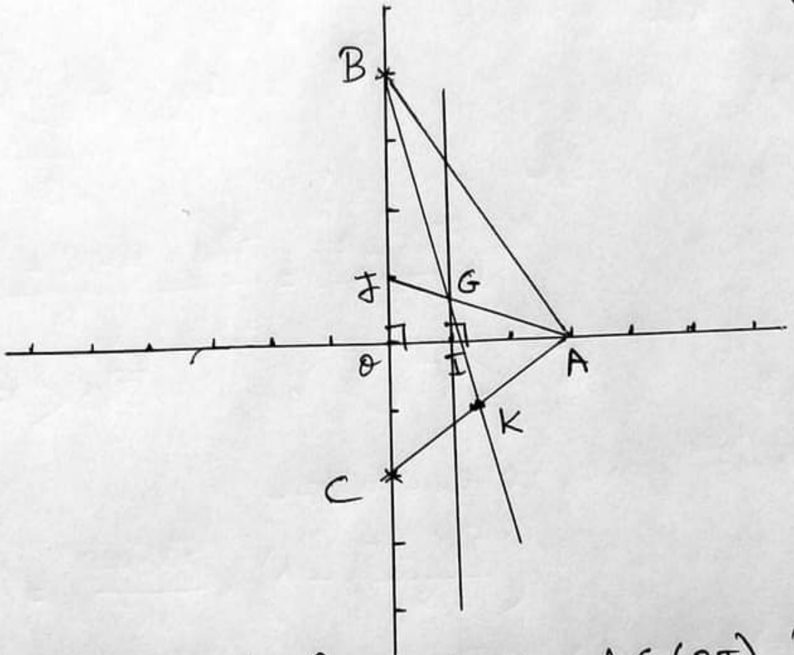
$$=a+\sqrt{2-2a-1+a^2}=a+\sqrt{(a-1)^2}$$

(2)

$= a + |a-1| = a + 1 - a = 1$

(لأن $|a-1| = 1-a$; $a<1$)

التمرين (3)



1) أ) لنا $A \in (OI)$ و $(IG) \perp (OA)$ إذن $(IG) \perp (OI)$

وبما أن $(OJ) \perp (OI)$ يعني $(IG) // (OJ)$

ب) لدينا: 1) AOJ مثلث
2) $G \in (AJ)$ و $I \in (OA)$
3) $(IG) // (OJ)$

حسب مبرهنة طالس فإن $\dfrac{AI}{AO} = \dfrac{AG}{AJ} = \dfrac{IG}{OJ}$

و $OA = |x_A| = 3$ و $OI = 1$ إذن $IA = 2$

وبالتالي $\dfrac{AG}{AJ} = \dfrac{2}{3}$ يعني $AG = \dfrac{2}{3} AJ$

ج) بما أن $BJ = |y_B - y_J| = 3$ و $JC = |y_C - y_J| = 3$ ولنا B و J و C
على استقامة واحدة إذن J منتصف $[BC]$

(3)

في المثلث ABC لدينا: J منتصف [BC] إذن [AJ] هو الموسط الصادر من A للمثلث ABC ولنا $G \in (AJ)$ حيث $AG = \frac{2}{3} AJ$

ومنه نستنتج أن G هي مركز ثقل المثلث ABC.

3) لدينا: G هو مركز ثقل المثلث ABC إذن (BG) هو حامل للموسط الصادر من B للمثلث ABC وبما أن $(BG) \cap (AC) = \{K\}$

يعني K منتصف [AC].

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = 3/2$$

$$K(3/2 ; -1)$$

$$y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

4) لدينا:

$$S_{ABK} = S_{BCK} = \frac{S_{ABC}}{2}$$

لأن [BK] هو موسط في المثلث ABC

وبما أن

$$S_{ABC} = \frac{OA \times BC}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = \frac{18}{2}$$

يعني

$$S_{ABK} = 9$$

وبالتالي

$$\boxed{S_{ABK} = 9/2}$$

(4)

التمرين (4)

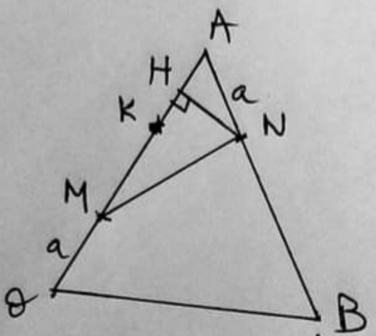
1) أ)

$$(x-1)(x-3) = x^2 - 3x - x + 3$$
$$= x^2 - 4x + 3 = \underbrace{x^2 - 4x + 16} - 13$$
$$= E - 13$$

ب) $(x-1)(x-3)=0$ يعني $E-13=0$ يعني $E=13$

يعني $x=3$ أو $x=1$

2) $S_{OMNB} = S$, $OM = AN = a$, $a \in]0,2]$



أ) لدينا في المثلث AKN ; $K\hat{A}N = 60°$ و $AK = AN$ إذن هو مثلث متقايس الضلعين في A و $\hat{A} = 60°$ يعني أنه متقايس الأضلاع

$[NH]$ هو الارتفاع الصادر من N للمثلث AKN (متقايس الأضلاع)

إذن $\boxed{NH = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

ب) $S_{AMN} = \frac{NH \times AM}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \times (4-a)}{2} = \frac{a(4-a)\sqrt{3}}{4}$

ج) لنا OAB متقايس الأضلاع إذن الارتفاع هو $\frac{4\sqrt{3}}{2}$

ومنه $S_{OAB} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{2} \times 4}{2} = 4\sqrt{3}$

(5)

$$S = S_{AOB} - S_{AMN} = 4\sqrt{3} - \frac{a(4-a)\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{16\sqrt{3} - 4\sqrt{3}a + \sqrt{3}a^2}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(16 - 4a + a^2)}{4}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - 4a + 16)$$

د) لنا: $(a-2)^2 + 12 = a^2 + 4 - 4a + 12 = a^2 - 4a + 16$

ومنه $S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left((a-2)^2 + 12\right)$.

لدينا $S - 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left((a-2)^2 + 12\right) - 3\sqrt{3}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(a-2)^2 + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a-2)^2 \geq 0$$

ومنه $\boxed{S \geq 3\sqrt{3}}$

3) $S = \frac{13\sqrt{3}}{4}$ يعني $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - 4a + 16) = \frac{13\sqrt{3}}{4}$

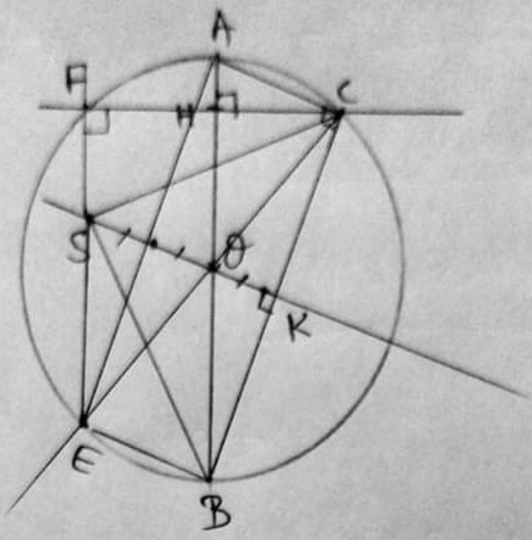
يعني $a^2 - 4a + 16 = 13$

يعني $E_a = 13$ ومنه $a = 3$ أو $a = 1$

(بالرجوع الى السؤال 1) ب)

(6)

التمرين (4)



1) أ) لدينا: [AB] قطر للدائرة ع و C ∈ ع إذن ABC مثلث قائم في C وبما أن [HC] هو الارتفاع الصادر من C للمثلث ABC فإن حسب العلاقة

$CH^2 = AH \times HB = 1 \times 9 = 9$

ومنه $\boxed{CH = \sqrt{9} = 3}$

ب) لدينا AFB مثلث قائم في F لأنه يقبل الارتسام في دائرة قطرها أحد أضلاعه ([AB]) و [FH] هو الارتفاع الصادر من F إذن

$FH^2 = AH \times HB = 1 \times 9 = 9$

ومنه $\boxed{FH = \sqrt{9} = 3}$

وبما أن $CH = FH = 3$ و C وF وH على استقامة واحدة إذن H منتصف [FC]

2) لدينا ABC مثلث ; O منتصف [AB] و (OK)//(AC) لأنهما عموديان على نفس المستقيم (BC)

حسب مبرهنة طالس والمنتصفات فإن K منتصف [BC]

في المثلث SBC لنا [SK] الموسط الصادر من S

$SO = 2OK$ حيث $O \in [SK]$

$= 2(SK - SO) = 2SK - 2SO$

إذن $SO + 2SO = 2SK$

ومنه $3SO = 2SK$

يعني $SO = \frac{2}{3} SK$.

وبالتالي O مركز ثقل المثلث SBC.

3) أ) قطرا الرباعي ACBE هما قطرا الدائرة ع ومنه القطران [AB] و [CE] لهما نفس المنتصف وبالتالي الرباعي ACBE متوازي الاضلاع وبما أن $A\hat{C}B = 90°$ يعني أنه مستطيل

* بما أن ACBE مستطيل إذن $AC = EB$ و $(AC) // (EB)$

ونحن نعلم أن $OK = \frac{1}{2} AC$ و $OK = \frac{1}{2} OS$ إذن $OS = AC = EB$

ولنا $(OK) // (EB)$ و $S \in (OK)$ إذن $(SO) // (EB)$

وبالتالي OSEB متوازي الاضلاع لان له ضلعان متوازيان ومتقايسان

ب) لدينا EFC مثلث قائم في F لان $F \in ℭ$ و [EC] قطرها

ومنه $(EF) \perp (FC)$ وبما أن $(AO) \perp (FC)$ يعني $(EF) // (AO)$

ولنا B و A و O على استقامة واحدة إذن $\boxed{(EF) // (OB)}$ (1)

وبما أن $\boxed{(OB) // (ES)}$ (2) نستنتج أن $(EF) // (ES)$

ولهما نقطة مشتركة E إذن S و E و F على استقامة واحدة

ج) لنا EFC مثلث حيث H منتصف $[FC]$
و O منتصف $[EC]$

إذن $OH = \frac{1}{2} EF$ وبما أن $AH = 1$ و $OA = 5$ إذن $OH = 4$

ومنه $\boxed{EF = 8}$

ولدينا $\underline{SE = OB = 5}$ ($SOBE$ متوازي الأضلاع)

وبالتالي: $\boxed{SF = EF - SE = 8 - 5 = 3}$

4) $OHFS$ شبه منحرف قاعدتاه $[OH]$ و $[FS]$

$$S_{OHFS} = \frac{(OH + SF) \times HF}{2} = \frac{(4+3) \times HF}{2}$$

$$= \frac{(4+3) \times 3}{2} = \frac{21}{2}\ cm^2$$

Zakraoui Faouzi